

Ensino Profissional

Maria Augusta Neves

Albino Pereira

António Leite

Luís Guerreiro

M. Carlos Silva

Revisão científica

Professor Doutor Jorge Nuno Silva

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

B1

Matemática

Funções periódicas e não periódicas

Caro estudante

A Matemática desenvolve o pensamento e ajuda o cidadão a compreender e a resolver os problemas que envolvem a nossa sociedade, que todos queremos que seja um exemplo de progresso social e económico.

Seja bem-vindo ao estudo da Matemática dos cursos profissionais. O estudo da Matemática vai ajudá-lo a ganhar autoconfiança, autonomia, capacidade de empreendimento e flexibilidade para se adaptar a mudanças ao longo da vida.

A Matemática desenvolve a capacidade de ser persistente e a nunca dizer “eu não sei”, mas, pelo contrário, perante uma situação nova, dizer “eu ainda não sei”.

Aprender matemática é aprender a viver e a conviver, resolvendo sempre com otimismo qualquer situação ou problema que lhe surjam ao longo da vida.

A si, a quem é especialmente dirigido este livro, desejamos os maiores sucessos.

Os autores



A cópia ilegal viola os direitos dos autores.
Os prejudicados somos todos nós.

TEMA 1 Resolução de problemas envolvendo triângulos retângulos (Revisão)

1

Teoria 1. Razões trigonométricas de um ângulo agudo	8
Teoria 2. A calculadora gráfica e as razões trigonométricas	10
Teoria 3. Resolução de problemas usando razões trigonométricas	12
Teoria 4. Resolução de problemas geométricos usando razões trigonométricas	14
Avaliação	16
Atividades de síntese	18

TEMA 2 Generalização da noção de ângulo e arco. Razões trigonométricas generalizadas

2

Teoria 1. O radiano	20
Teoria 2. Representação de um ângulo orientado	22
Teoria 3. Generalização da noção de ângulo	24
Teoria 4. Valores exatos das razões trigonométricas de 30° , 45° e 60°	26
Teoria 5. Generalização das razões trigonométricas	28
Teoria 6. Razões trigonométricas de 0° , 90° , 180° e 270°	30
Avaliação	32
Atividades de síntese	34

TEMA 3 Funções trigonométricas. Equações trigonométricas

3

Teoria 1. Funções trigonométricas como funções reais de variável real	36
Teoria 2. Domínio, contradomínio, extremos e zeros das funções trigonométricas	38
Teoria 3. Simetria e paridade das funções trigonométricas	40
Teoria 4. Resolução de equações do tipo $\sin x = a$	42
Teoria 5. Resolução de equações do tipo $\cos x = a$	44
Teoria 6. Resolução de equações do tipo $\operatorname{tg} x = a$	46
Avaliação	48
Atividades de síntese	50

TEMA	Coordenadas polares	
4	Teoria 1. Coordenadas polares de um ponto P do plano	58
TEMA	Funções racionais	
5	Teoria 1. Função racional	60
	Teoria 2. Conceito intuitivo de limite	62
	Teoria 3. Assíntotas verticais do gráfico de uma função racional	64
	Teoria 4. Assíntotas horizontais do gráfico de uma função racional	66
	Teoria 5. Resolução de problemas usando funções racionais	68
	Avaliação	76
	Atividades de síntese	78
TEMA	Resolução de problemas escolhendo o modelo mais adequado à situação descrita	
6	Teoria 1. Regressão linear	80
	Teoria 2. Regressão quadrática	82
	Teoria 3. Regressão cúbica e regressão quártica	85
	Teoria 4. Funções trigonométricas	95
ANEXOS		98
Soluções		106

Atividade inicial

2

Rotações

Observe as figuras ao lado.

Na figura 1, diz-se que o ponto A' é transformado do ponto A por uma rotação de centro O e ângulo $+90^\circ$.

Na figura 2, diz-se que o ponto A' é transformado do ponto A por uma rotação de centro O e ângulo -90° .

A cada ângulo pode associar-se uma amplitude e um sentido. Convencionou-se que o sentido do movimento dos ponteiros do relógio corresponde ao sentido negativo e o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio corresponde ao sentido positivo.

Desenhe o ponto A' transformado do ponto A por uma rotação de centro O e:

2.1 ângulo $+180^\circ$; **2.2** ângulo -180° .

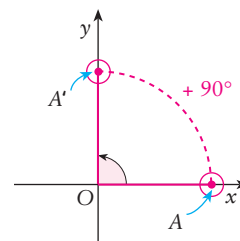


Figura 1

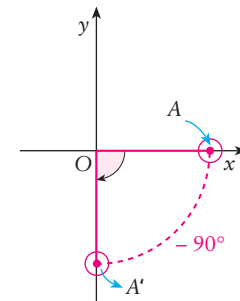


Figura 2

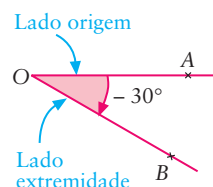
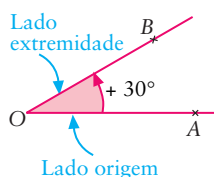
Teoria

2

Representação de um ângulo orientado

Objetivo

Representar um ângulo orientado.

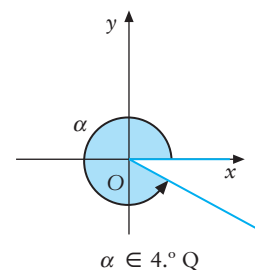
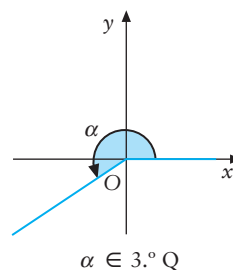
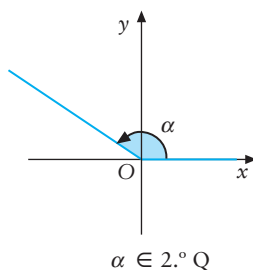
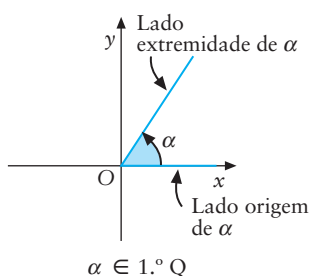


A um ângulo ao qual se atribui um sentido chama-se **ângulo orientado**.

Para representar um ângulo orientado utiliza-se um sistema de coordenadas cartesianas.

Os eixos coordenados dividem o plano em quatro regiões e a cada uma delas chama-se quadrante. O lado origem do ângulo coincide com a parte positiva do eixo das abcissas. Os ângulos dizem-se do 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º quadrante, de acordo com o quadrante a que pertence o lado extremidade do ângulo.

Quando o lado extremidade se sobrepõe a um dos eixos o ângulo não pertence a nenhum quadrante. Por exemplo, o ângulo de amplitude 90° não é nem do 1.º nem do 2.º quadrante.



Exemplo

2

Representar um ângulo

Represente, num referencial, o ângulo α e indique o quadrante a que pertence.

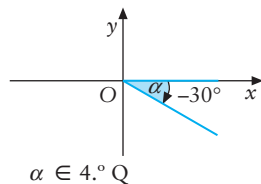
2.1 $\alpha = -30^\circ$;

2.2 $\alpha = 210^\circ$;

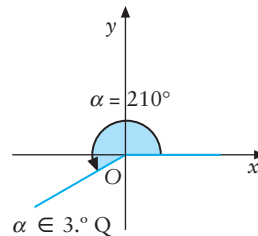
2.3 $\alpha = -300^\circ$.

Resolução

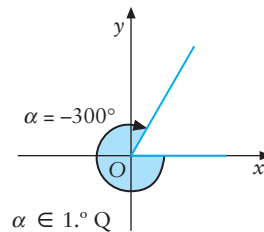
2.1



2.2



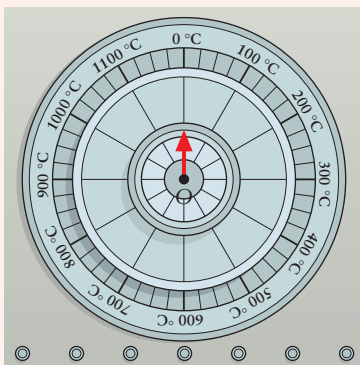
2.3



Verifica

2

2.1 Numa máquina industrial existe um botão com a forma de um círculo com centro em O , que roda nos dois sentidos para selecionar a temperatura desejada para um determinado trabalho, como se ilustra na figura seguinte.



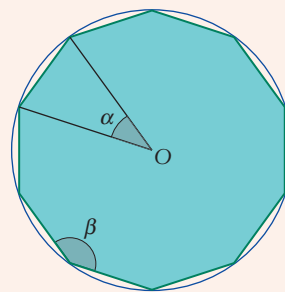
Qual é a temperatura indicada, em graus Celsius, quando se roda o botão:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) -30° ? | b) 30° ? |
| c) -60° ? | d) 120° ? |
| e) 180° ? | f) -180° ? |
| g) -360° ? | h) 360° ? |

2.2 Represente, num referencial, cada um dos seguintes ângulos e diga a que quadrante pertence:

- -25° ;
- 315° ;
- -280° ;
- $-\frac{3}{5}\pi$ rad.

2.3 Na figura seguinte está representada uma circunferência de centro O e nela está inscrito um decágono regular.



- Exprima α e β em graus e em radianos.
- Represente α e β num referencial e diga a que quadrante pertencem.

1

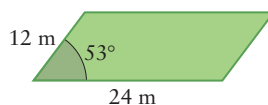
ATIVIDADE



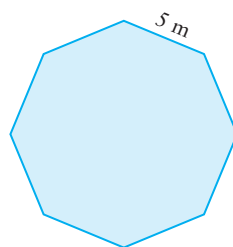
Sugestão para trabalho de grupo

Na praça

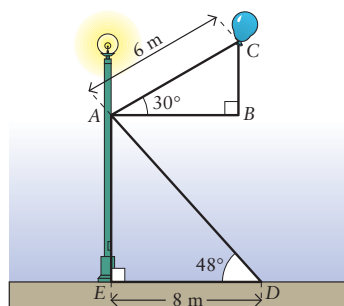
Numa praça há um jardim com a forma de um paralelogramo, como se mostra na figura.



Dentro do jardim há um lago com a forma de um octógono regular com 5 m de lado.



A praça é iluminada por um candeeiro, o qual se ilustra na figura seguinte.



O João brincava no parque com um balão, mas este ficou preso como se mostra na figura acima.

- 1.1 Qual é a área do jardim com a forma de um paralelogramo?
Apresente a resposta em metros quadrados com duas casas decimais.
- 1.2 Qual é a área da superfície do lago?
Apresente a resposta em metros quadrados com duas casas decimais.
- 1.3 Qual é a área do jardim que não é ocupada pelo lago?
Apresente a resposta em metros quadrados com duas casas decimais.
- 1.4 Qual é a distância do balão ao solo?
Apresente a resposta com aproximação às centésimas do metro.

No parque da cidade

A figura seguinte representa vários pormenores que existem num parque da cidade.

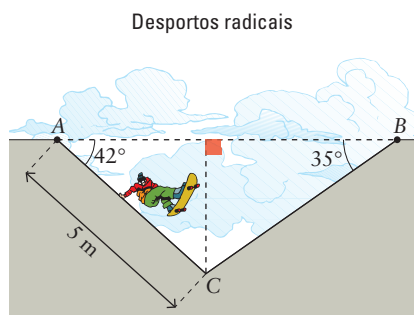


Figura 1

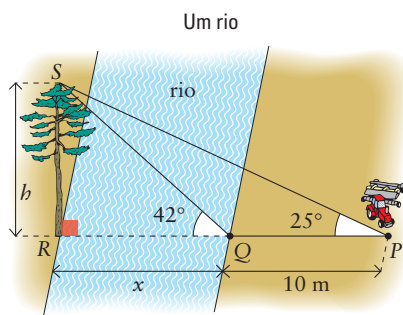


Figura 2

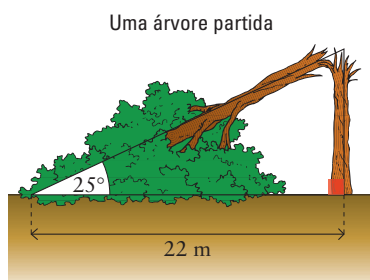


Figura 3



O teodolito é um instrumento ótico utilizado na topografia para medir a amplitude de ângulos verticais e horizontais.

- 2.1** Sabendo que a distância entre o pé da árvore e a extremidade caída no solo é de 22 m (ver figura 3) e que o ângulo formado pela linha do solo e pela parte da árvore caída é de 25° , determine a altura da árvore antes desta se partir.

Apresente o resultado em metros com duas casas decimais.

- 2.2** O Pedro que gosta de praticar desportos radicais tem um medidor de ângulos e uma fita métrica.

Como, sozinho, não consegue medir a distância entre A e B (ver figura 1), concluiu que:

$$\overline{AC} = 5 \text{ m}; \quad \widehat{BAC} = 42^\circ \quad \text{e} \quad \widehat{ABC} = 35^\circ.$$

Com estes dados, determine \overline{AB} .

Apresente o resultado em metros com duas casas decimais.

- 2.3** O Paulo que se encontra no ponto P (ver figura 2) pretende determinar a largura do rio, x , e a altura, h , da árvore que se encontra na outra margem.

Com uma fita métrica e um medidor de ângulos concluiu que:

$$\widehat{SPQ} = 25^\circ; \quad \widehat{SQR} = 42^\circ \quad \text{e} \quad \overline{QP} = 10 \text{ m}.$$

Determine x e h .

Apresente os valores pedidos em metros com duas casas decimais.