

Índice

Prefácio da edição de 2016, pelo Revisor Científico.....	9
Prefácio da segunda edição revista de 1884, pelo Editor	15
PARTE I: ESTE MUNDO	21
1. A Natureza do Mundo Plano	23
2. O Clima e as Casas no Mundo Plano	25
3. Sobre os Habitantes do Mundo Plano	29
4. Sobre as Mulheres	33
5. Os Nossos Métodos para nos Reconhecermos uns aos outros	40
6. O Reconhecimento pela Visão	46
7. Sobre as Figuras Irregulares	52
8. A Ancestral Prática da Pintura	56
9. A Lei Universal da Cor	60
10. A Repressão da Rebelião Cromática	65
11. Sobre os Nossos Sacerdotes	70
12. A Doutrina dos nossos Sacerdotes	73
PARTE II: OUTROS MUNDOS	81
13. Como tive uma Visão do Mundo Linear	83
14. Como tentei, em vão, explicar a Natureza do Mundo Plano	89
15. Sobre um Estranho do Espaço	96
16. Como tentou, em vão, o Estranho explicar-me, por palavras, os mistérios do Espaço	100
17. Como se valeu o Esfera de atos, depois de recorrer, em vão, às palavras	110
18. Como cheguei ao Espaço e o que lá vi.....	113

19. Como continuei a querer saber mais, apesar de o Esfera me revelar outros mistérios do Espaço, e o que isso originou	119
20. Como me encorajou o Esfera a alimentar uma Visão	127
21. Como e com que sucesso tentei ensinar a Teoria das Três Dimensões ao meu Neto	131
22. Como e com que resultado tentei, depois, por outros meios, divulgar a Teoria das Três Dimensões	134

ATRAVÉS E PARA ALÉM DO MUNDO PLANO

Um conjunto de atividades matemáticas para puxar pelo cérebro.....	141
---	-----

Prefácio da edição de 2016, pelo Revisor Científico

Será mesmo verdade que todos os quadrados são semelhantes? A história que aqui se abre pode levar-nos a crer que não o são. Mas não nos referimos à sua mais ou menos reta angularidade! Na opinião do autor deste Prefácio, o QUADRADO – herói de *Flatland, O Mundo Plano* – é um quadrado especial: a sua visão, transpondo as limitações físicas da retina, permite-lhe conceber com sensata perspicácia um mundo revelador e audacioso até para um CUBO ou uma ESFERA do Espaço.

Mas quem é UM QUADRADO? Seguindo os bons ensinamentos da Matemática, talvez devêssemos generalizar e começar por questionar: *quem é A²*? Muito possivelmente é o *alter ego* plano do autor de *Flatland*, Edwin Abbott Abbott. Repare-se que a repetição do sobrenome Abbott (que se deve provavelmente ao facto de o pai, Edwin Abbott, ter casado com uma prima direita, Jane Abbott) leva facilmente à graça, de inclinação matemática, *Abbott ao Quadrado* ou, de forma mais caricata, *A ao Quadrado*. Ora, na língua inglesa, *A ao Quadrado* diz-se *A Square*, que por sua vez significa *Um Quadrado*, o narrador e herói de *Flatland*.

Sobre Edwin A. Abbott

Não nos alongaremos nos detalhes biográficos de Abbott, que são facilmente acessíveis, mas queremos salientar aspectos da sua vida que consideramos relevantes para uma melhor compreensão desta obra, escrita em 1884.

Edwin A. Abbott (1838-1926) nasceu e viveu em Londres, Inglaterra. A sua carreira foi dedicada principalmente ao ensino,

10 tendo sido Diretor da prestigiosa escola City of London School, de 1865 (com apenas 26 anos) a 1889. Era tido, tanto pelos seus pares como pelos seus alunos, como um excelente e exigente professor. Era também um ávido escritor, tendo publicado mais de 50 livros, alguns de carácter escolar, outros sobre literatura e outros sobre teologia. Como Diretor da escola, fortaleceu a componente científica do currículo, em particular o papel da Matemática, e implementou a redução do número de alunos por turma.

Abbott foi também sacerdote da Igreja Anglicana, pertencendo à sua corrente mais liberal. À luz destes factos torna-se ainda mais interessante a leitura das passagens do livro que descrevem o comportamento e o estatuto dos Círculos, os sacerdotes do Mundo Plano, bem como a sua autoproclamada supremacia moral e intelectual.

A Época Vitoriana

Abbott viveu no auge da designada Época Vitoriana, correspondente ao reinado da Rainha Vitória do Reino Unido, que decorreu de 1837 até 1901. Este período, apesar da prosperidade económica que granjeou aos britânicos, caracterizou-se também pelo seu conservadorismo social e moral, mantendo estanques os vários patamares da hierarquia social vigente.

Mais uma vez, é de ter este contexto histórico e social em mente para melhor compreender a ironia de Abbott quando descreve a hierarquia de Flatland, que é altamente estratificada e que depende não do mérito e das capacidades do indivíduo mas do seu berço e da sua aparência Regular. Observe-se, por exemplo, a seguinte passagem da obra: «Foi graças aos Círculos que foi efetivamente possível erradicar certas heresias ancestrais que levavam os homens a desperdiçar energia e compaixão

na crença vã de que a conduta dependia da vontade própria, esforço, treino, encorajamento, louvores ou de qualquer outra coisa para além da Forma.»

A Educação das Mulheres

Na Época Vitoriana, a desigualdade entre os sexos era uma evidência a quase todos os níveis, com o desequilíbrio sempre a pender desfavoravelmente para o lado das mulheres. Com o casamento, a mulher era obrigada a abdicar dos seus direitos em favor do marido, incluindo todo o dinheiro que possuísse e viesse a ganhar como salário – porque apesar de não poder votar, uma mulher podia trabalhar em fábricas durante longas horas sob duras condições. Fora isso, o seu papel estava reduzido essencialmente à execução das tarefas domésticas e ao zelo pelas necessidades do marido e dos filhos. Não é assim de estranhar que a educação das jovens se limitasse ao ensino vocacional, orientado para as tarefas domésticas como a culinária, a costura, a gestão do lar, o arranjo floral, etc., podendo incluir também, nas escolas destinadas aos estratos sociais mais elevados, o canto e o estudo de piano, francês, desenho e literatura. Mesmo com a introdução de legislação, na década de 1870, tornando o ensino obrigatório para as raparigas, o resultado traduziu-se no aprofundamento das diferenças sociais, uma vez que apenas as raparigas provenientes dos estratos mais elevados da sociedade poderiam beneficiar de uma educação mais em linha com a educação dos rapazes, que incluía os estudos clássicos, Filosofia e Matemática.

O autor de *Flatland* era um forte defensor da igualdade no acesso à educação, tanto entre os vários estratos sociais como entre os sexos. É nesta perspetiva que devem ser entendidas as afirmações irónicas e até mordazes que o texto apresenta. O autor

12 caricaturou nos costumes de Flatland o que se passava na sociedade vitoriana em que vivia. Fixemo-nos, por exemplo, na seguinte passagem: «Decretou o Círculo-Mor há cerca de 300 anos que, sendo as mulheres falhas de Razão mas pródigas em Emoções, não deveriam continuar a ser tratadas como seres racionais nem receber qualquer espécie de educação intelectual. Em consequência disso, estas deixaram de aprender a ler, não sabendo sequer o suficiente de Aritmética para contar os ângulos do marido ou dos filhos, e a sua capacidade intelectual foi-se deteriorando significativamente ao longo de várias gerações. Este sistema de alienação educativa das mulheres prevalece até aos dias de hoje.»

Mais à frente, num registo um pouco mais lúcido, podemos ler: «Não me atrevo sequer a falar do risco que correremos, caso uma Mulher consiga sub-repticiamente aprender a ler e transmitir ao seu Sexo o que aprendeu na leitura de algum livro popular, ou se, por imprudência ou desobediência, alguma criança do Sexo Masculino revelar à Mãe os segredos do dialeto lógico. Sendo este meu humilde pleito unicamente fundado no enfraquecimento do Intelecto Masculino, apelo às mais altas Instâncias que reconsiderem as normas da Educação Feminina.»

A Quarta Dimensão, Abstração e Analogia

Sem querer minorizar os aspetos da obra referidos acima, o seu objetivo principal foi certamente a divulgação das ideias, emergentes na época, sobre a existência de uma quarta dimensão. E o grande mérito de Abbott foi ter conseguido fazê-lo de uma forma bastante lúcida e simultaneamente didática, recorrendo à analogia, construída em forma de diálogo entre o narrador, O Quadrado, e uma série de visitantes de mundos de outras dimensões: do Mundo Pontual, do Mundo Linear e, o mais proeminente de todos, o Esfera (que, por coerência com a

obra original, é uma esfera do sexo masculino) do Espaço tridimensional – o mundo habitado pelo leitor.

Inicialmente, é o Esfera que leva os ensinamentos do Espaço ao Quadrado e desencadeia a imaginação e a compreensão deste, com tal sucesso que de seguida é o próprio Quadrado que suplanta o seu Mestre esférico e lhe dá uma lição sobre a quarta dimensão. Não encontrando motivo por que parar na quarta dimensão, o Quadrado prossegue entusiasticamente discorrendo sobre a quinta e a sexta, e por aí fora, almejando por fim despertar «uma estirpe de rebeldes que se recuse a aceitar ser confinada a uma Dimensionalidade limitada.»

Então o que é a quarta dimensão e que sentido é que tem? Atualmente, a questão da quarta, quinta ou n -ésima dimensão não oferece qualquer problema em Matemática e há até «mundos» matemáticos com dimensão fracionária ou mesmo irracional (exemplos populares com estas características são os fractais), mas na época de Abbott, a ideia de uma quarta dimensão não temporal, que começara a despertar interesse no meio científico, não era, de todo, consensual ou clara, muito menos para o público em geral. Talvez no intuito de captar também a atenção de um público menos inclinado para a ciência e mais propenso para a magia, o misticismo e o espiritismo, muito em voga à época, Abbott alude ao facto de que a existência de uma quarta dimensão poderia justificar todos os fenómenos associados a estas crenças, pensando que os espíritos estão para nós humanos como o Esfera está para O Quadrado. Uma evidência desta afirmação encontra-se na passagem em que o Esfera consegue transferir a prancheta do Quadrado para fora de um armário fechado, sem o abrir.

Apesar de a Física ter ajudado a dar uma possível interpretação concreta da quarta dimensão como o tempo, que está

- 14 longe de ser a única interpretação possível – ou sequer a mais adequada, dependendo do contexto –, arriscaríamos dizer que a ideia de mais de três dimensões é ainda estranha ou misteriosa para a maioria. É natural que assim seja, até porque nunca poderemos compreender completamente esta noção sem antes refletirmos sobre o significado que damos a «dimensão», e a dissociarmos do espaço físico perceptível, do qual nos inteiramos por via de um processo complexo de troca de informação entre o cérebro e a retina ocular, que transforma informação plana em percepção espacial. Esta é a forma inata de aprendizagem do ser humano, que no entanto também tem a capacidade racional de construir conhecimento noutros planos que não estão ao alcance dos sentidos.

É esperado que, pelo processo de analogia, o leitor se ponha no papel do Quadrado e desta forma veja com naturalidade a possibilidade de o seu mundo não passar de uma secção de um Mundo quadridimensional mais vasto. Mas deixemos que o leitor se inspire na história que lhe vai ser contada e que daí tire as suas próprias ideias!

Sobre Samuel Lopes

Samuel A. Lopes é Matemático, mas não é Quadrado. Teve os primeiros contactos com a terceira e quarta dimensões na localidade de Leiria – região que outros também inspirou em questões de alta dimensionalidade. Aspirou à quinta dimensão nos Estados Unidos da América, onde se doutorou em Álgebra na Universidade de Wisconsin-Madison. Desde 2004 que é Professor no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, onde coexistem Pontos, Retas, Círculos, Esferas e números de todas as espécies.

1. A Natureza do Mundo Plano

Resolvi chamar Mundo Plano ao nosso mundo, não porque seja esse o nome que lhe damos, mas para facilitar a compreensão da sua natureza a todos vós, ditosos leitores, agraciados com o privilégio de viver no Espaço.

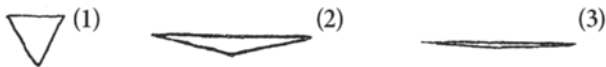
Imaginem uma grande folha de papel com Segmentos de Reta, Triângulos, Quadrados, Pentágonos, Hexágonos e outras figuras que, em vez de se manterem fixas, se movem livremente sobre, ou, mais propriamente, na superfície da folha, sem que possam, contudo, erguer-se acima ou abaixo dela – muito à semelhança das sombras, embora rígidas e com contornos luminosos – e ficarão com uma noção bastante precisa do meu país e dos meus conterrâneos. Há uns anos, infelizmente, ter-lhe-ia chamado «o meu universo», mas decidi abrir a minha mente a visões mais elevadas.

Concluirão de imediato que nada do que entendem por «sólido» poderá existir num país como este, embora me atreva a dizer que julgarão, pelo menos, possível, que possamos distinguir visualmente os Triângulos, os Quadrados e as outras figuras em movimento que descrevi. Mas ao contrário do que pensam, não observamos nada do género, nada que nos permita, no mínimo, distinguir uma figura da outra. Nada é nem poderá ser visível aos nossos olhos, a não ser os Segmentos de Reta. Demonstrarei rapidamente por que razão só assim poderia ser.

Coloquem uma moeda de um cêntimo sobre uma das vossas mesas do Espaço, inclinem-se sobre ela e olhem-na de cima. Parecer-vos-á um círculo.

Agora, recuem até à beira da mesa e baixem os olhos lentamente (assumindo, assim, gradualmente, a condição de habitantes do Mundo Plano). Verificarão que a moeda se vai tornando gradualmente oval, aos vossos olhos. Finalmente, quando a olharem exatamente da beira da mesa (convertendo-se, por assim dizer, em verdadeiros nativos do Mundo Plano) a moeda terá perdido por completo a aparência oval, transformando-se num Segmento de Reta, pelo menos na vossa perspetiva.

O mesmo aconteceria se repetissem a experiência com um Triângulo, um Quadrado ou qualquer outra figura recortada em cartolina. Assim que a olharem da beira da mesa, verificarão que esta deixou de parecer uma figura e assumiu a forma de um Segmento de Reta. Considerem, por exemplo, um Triângulo equilátero, que entre nós representa um Comerciante da classe respeitável. A figura 1 é a representação de um Comerciante, tal como o veriam, ao inclinar-se sobre ele e olhá-lo de cima; as figuras 2 e 3 representam a vossa perspetiva do Comerciante, se o olharem perto da beira da mesa ou mesmo junto desta. Se os vossos olhos estivessem exatamente ao nível da mesa (e essa é a forma como o vemos no Mundo Plano), veriam apenas um Segmento de Reta.



Quando estava no Espaço, ouvi dizer que os vossos marinheiros passam por experiências muito similares ao atravessar os vossos mares, sempre que avistam no horizonte uma ilha

remota ou uma extensão de costa. Essa terra distante poderá ter baías, orlas marítimas, inúmeros ângulos côncavos ou agudos das mais variadas formas. Contudo, nada disso é visível à distância (a menos que o sol incida intensamente sobre elas, revelando as projeções e as reentrâncias, por ação da luz e da sombra), nada é visível a não ser uma linha contínua, cinzenta, sobre a água.

E é justamente isso que vemos, quando um triângulo ou outra figura conhecida, se aproxima de nós, no Mundo Plano. Como não temos sol nem nenhum tipo de luz capaz de gerar sombras, não dispomos de nenhum dos auxiliares de visão que vocês têm no Espaço. Se o nosso amigo se acercar de nós a sua linha alonga-se; se estiver a afastar-se esta decresce, mas não deixa de parecer um Segmento de Reta, seja ele um Triângulo, um Quadrado, um Pentágono, um Hexágono ou um Círculo - o que quiserem. Não passa de um Segmento de Reta.

Talvez se perguntem como conseguimos distinguir os nossos amigos uns dos outros em condições tão adversas, mas será mais fácil responder adequadamente a essa pergunta tão natural quando vos descrever os habitantes do Mundo Plano. Permitam-me protelar, por agora, esse assunto, para vos falar um pouco do clima e das casas do nosso país.

2. O Clima e as Casas no Mundo Plano

Entre nós, tal como entre vós, há quatro pontos cardeais na bússola: Norte, Sul, Este e Oeste.

Na ausência de um sol e de outros corpos celestes, não podemos determinar o Norte da forma habitual, mas dispomos de

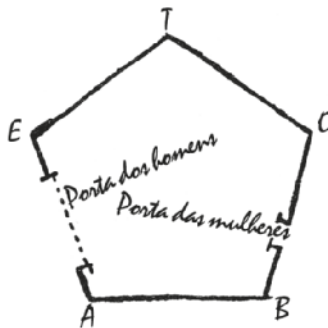
26 um método próprio para o fazer. Segundo uma das nossas Leis da Natureza, somos constantemente atraídos para Sul. Embora em climas temperados isso seja quase imperceptível, permitindo até a uma Mulher medianamente saudável viajar alguns quilómetros para Norte, sem grande dificuldade, o efeito restritivo da atração para Sul é suficientemente significativo para servir de bússola em quase todos os locais do nosso mundo. Além disso, a chuva (que cai em intervalos determinados) vinda sempre de Norte constitui uma ajuda adicional. Nas cidades, orientamo-nos também pelas casas, cujas paredes laterais se estendem, geralmente, de Norte a Sul, para que os telhados nos abriguem da chuva vinda de Norte, e no campo, onde não há casas, os troncos das árvores servem-nos de alguma maneira de guia. De uma forma geral, não nos é tão difícil perceber onde estamos como seria de esperar.

Contudo, nas regiões mais temperadas, onde a atração para Sul mal se faz sentir, ao caminhar em planícies, algumas delas perfeitamente desoladas, sem casas nem árvores para me orientar, senti-me por vezes compelido a parar durante horas, à espera que chovesse, para prosseguir a minha jornada.

A força da atração faz-se sentir muito mais intensamente nos fracos, nos idosos e, especialmente, em Mulheres delicadas, do que em robustos espécimes do Sexo Masculino, sendo por isso hábito, por uma questão de educação, oferecer sempre o lado Norte do caminho, quando encontramos uma Senhora na rua – o que não é nada fácil de fazer, de um momento para o outro, quando se está de boa saúde e se vive num clima onde é difícil distinguir o Norte do Sul.

Não temos janelas nas nossas casas, pois a luz banha-nos sempre da mesma forma, dentro ou fora de casa, de dia ou de noite, a todas as horas e em todos os locais. De onde vem não sabemos. A pergunta «Qual a origem da luz?» foi, em tempos,

considerada interessante e era frequentemente investigada pelos nossos eruditos. Tentou-se repetidamente desvendar o mistério, o que teve como consequência única encher os manicômios de aspirantes a descobridores. Assim, depois de se tentar, em vão, travar essas investigações de forma indireta, atribuindo-lhes um pesado imposto, estas acabaram por ser totalmente proibidas, numa Legislatura bastante mais recente, em termos comparativos. Infelizmente, o único nativo do Mundo Plano com perfeito conhecimento da solução real para este misterioso problema sou eu, e apenas eu, embora não consiga transmitir esse conhecimento, de forma inteligível, a nenhum dos meus contrerrâneos. Eu - o único conhecedor das verdades do Espaço e da teoria da introdução de Luz do mundo Tridimensional - sou alvo de chacota, como se fosse doido varrido! Mas chega de divagações dolorosas: voltemos às casas.



O método mais comum de construção é a casa de cinco lados ou pentagonal, como na figura anexa. Os dois lados virados a Norte, TE, TO, compõem o telhado e, geralmente, não possuem portas. No lado Este existe uma pequena porta para as Mulheres e, no lado Oeste, uma porta muito maior para os

28 Homens. O lado Sul ou chão, normalmente, não possui portas.

Não são permitidas casas quadradas nem triangulares pela seguinte razão: sendo os ângulos de um quadrado (mais ainda os de um Triângulo equilátero) muito mais agudos do que os de um Pentágono e as linhas de objetos inanimados (tais como casas) muito mais indistintas que as linhas de Homens e Mulheres, o perigo de que as pontas de uma casa quadrada ou triangular provoquem ferimentos graves num viajante imprudente ou apenas distraído, que vá subitamente contra elas, é significativo. As casas triangulares foram universalmente proibidas por Lei, a partir do século XI da nossa era, com exceção de fortificações, armazéns de pólvora, casernas e outros edifícios do Estado, dos quais seria indesejável que o público se aproximasse imprudentemente.

Nessa altura, as casas quadrangulares ainda eram permitidas, embora a sua construção fosse desencorajada através de um imposto especial, mas cerca de três séculos depois, a Lei determinou que, em todas as cidades com mais de dez mil habitantes, o ângulo do Pentágono fosse o ângulo de construção mínimo permitido, em salvaguarda da segurança pública. O bom senso da comunidade secundou os esforços da Legislação e, hoje em dia, a construção pentagonal prevalece sobre todas as outras, em todo o país. Só muito raramente, em algumas regiões agrícolas remotas e retrógradas, é ainda possível a um antiquário descobrir uma casa quadrada.

**ATRAVÉS E PARA ALÉM
DO MUNDO PLANO**

**Um conjunto de atividades matemáticas
para puxar pelo cérebro**

A ti, caro leitor, que acabas de chegar a esta parte do livro, os meus PARABÉNS.

Viajar por mundos de diferentes dimensões pode ser complexo, mas é certamente muito valioso. Espero, por isso, que tenhas oportunidade de ser um pouco mais Quadrado, mas daqueles de mente aberta, daqueles que vislumbram a possibilidade de existir uma infinidade de novos universos que não conhecemos porque, simplesmente, os nossos sentidos não os conseguem captar.

Em vez de esperar por uma inusitada visita da quarta dimensão ao virar do próximo milénio, porque não seres tu mesmo a procurar esses novos mundos de dimensões desconhecidas? Para o sucesso dessa aventura é fundamental que treines regularmente e estimules a tua massa cinzenta.

Pelo sim pelo não, proponho que comeces já a trabalhar nisso! Deixo aqui uma série de desafios, na forma de exercícios e de comentários, que partem de Flatland e rumam ao aprofundar do pensamento matemático.

Boas viagens e boas descobertas, no Plano, no Espaço ou na tua Dimensão preferida!

Samuel Lopes
Abril de 2016