EX. 22

Determine analiticamente os zeros de cada uma das seguintes funções:

22.1. $f(x) = x^2 + x + 7$ **22.2.** $g(x) = 2x^2 + x - 3$ **22.3.** $h(x) = 4x^2 - 4x + 1$

EX. 23

Considere a família de funções quadráticas definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3k$, $k \in \mathbb{R}$.
Determine os valores que pode tomar o parâmetro real k, de modo que f não tenha zeros.

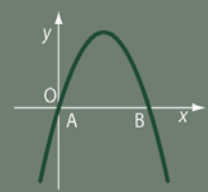
EX. 24

Considere a família de funções quadráticas definida por: $f(x) = 2x^2 + kx + (6 - k)$, $k \in \mathbb{R}$.
Determine k, de modo que f tenha apenas um zero e que o seu gráfico intersete o eixo Oy num ponto de ordenada inferior a 10.

ATIV.02 Parábolas

Pretende-se determinar uma equação do eixo de simetria e as coordenadas do vértice de uma parábola, imagem geométrica de uma função quadrática.

1. Considere a função f, definida por $f(x) = -x^2 + 4x$.



1.1. Determine analiticamente as coordenadas dos pontos A e B, pontos de interseção do gráfico de f com o eixo dos xx.

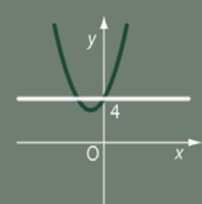
1.2. Escreva uma equação da mediatriz de [AB].

1.3. Que pode dizer da reta definida na alínea anterior em relação à parábola?

1.4. Indique as coordenadas do vértice da parábola.

2. Faça um estudo semelhante ao da questão anterior relativamente à função g, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3)$.

3. Considere a função h, definida por $h(x) = x^2 + 2x + 4$ e a reta de equação $y = 4$.



3.1. Determine analiticamente as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de h com a reta dada.

3.2. De modo análogo ao utilizado nas questões anteriores, determine as coordenadas do vértice da parábola.

4. Considere agora a função quadrática f, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Tendo em conta os passos seguidos nas etapas anteriores, determine uma fórmula que permita calcular as coordenadas do vértice da parábola e uma equação do seu eixo de simetria.

Zeros de uma função quadrática

Seja f a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$.
Os zeros de f são as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Recorde:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \text{Fórmula resolvente}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ chama-se **binómio discriminante**; representa-se por Δ.

- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções: $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Se $\Delta = 0$, a equação tem uma única solução: $x = -\frac{b}{2a}$.
- Se $\Delta < 0$, a equação é impossível.

APLICAÇÕES

1. Determine analiticamente os zeros das seguintes funções:

1.1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

1.2. $g(x) = 3x^2 - 4x + 2$

2. Dada a função h, definida por $h(x) = x^2 + 2mx + 3$, determine m de modo que h tenha um único zero.

R

1.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$

f tem dois zeros: 3 e -1.

1.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$
$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6}$

Como a equação é impossível, conclui-se que g não tem zeros.

2. h tem um único zero se e só se $\Delta = 0$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2m)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 3$

$\Leftrightarrow m = \sqrt{3} \vee m = -\sqrt{3}$